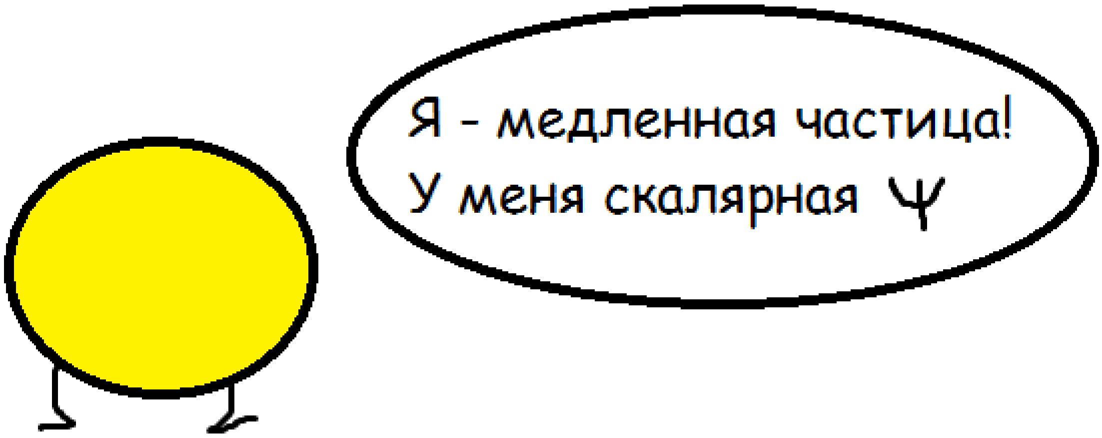
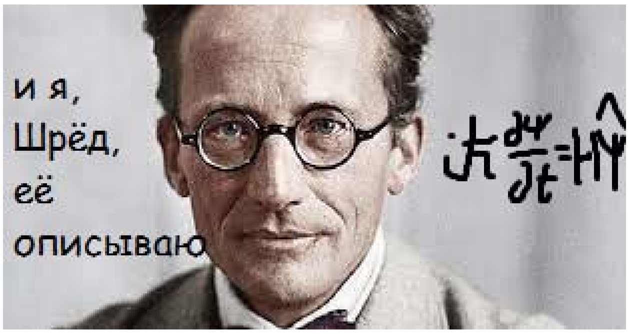
Есть старое-доброе уравнение Шрёдингера





Потом оказалось, что нужен спин, появилось уравнение Паули:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}A\hat{I})^2 + e\varphi\hat{I} - \frac{e\hbar}{2mc}(\vec{\hat{\sigma}}\vec{B})\right]\psi$$

где ВФ $\begin{pmatrix}\psi_1(r,t)\\ \psi_2(r,t)\end{pmatrix}$.

Но это всё нерелятивитские уравнения, а физики давно хотели построить релятивистское. Построили он в итоге два уравнения:
Клейна-Гордона-Фока – для частиц с целым спином (в первую очередь фотонов)
Дирака – для частиц с полуцелым спином (т.е. большинства – тех же электронов)

КГФ отложим на потом, а с теорией Дирака познакомимся прямо сейчас.

Первое, о чём следует сказать - у дираковской частицы ВФ четырёхкомпонентна:

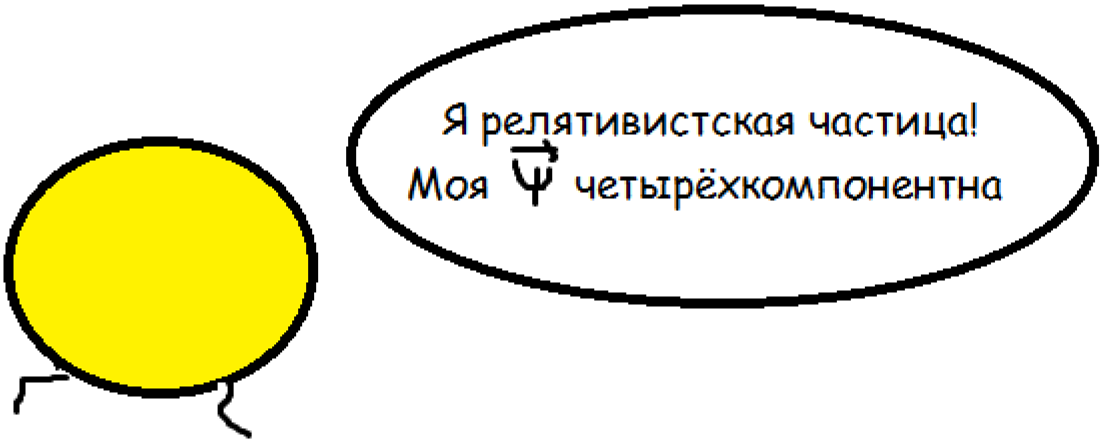
$$\begin{matrix}\Psi_1(x,t)\\ \Psi_2(x,t)\\ \Psi_3(x,t)\\ \Psi_4(x,t)\end{matrix}$$

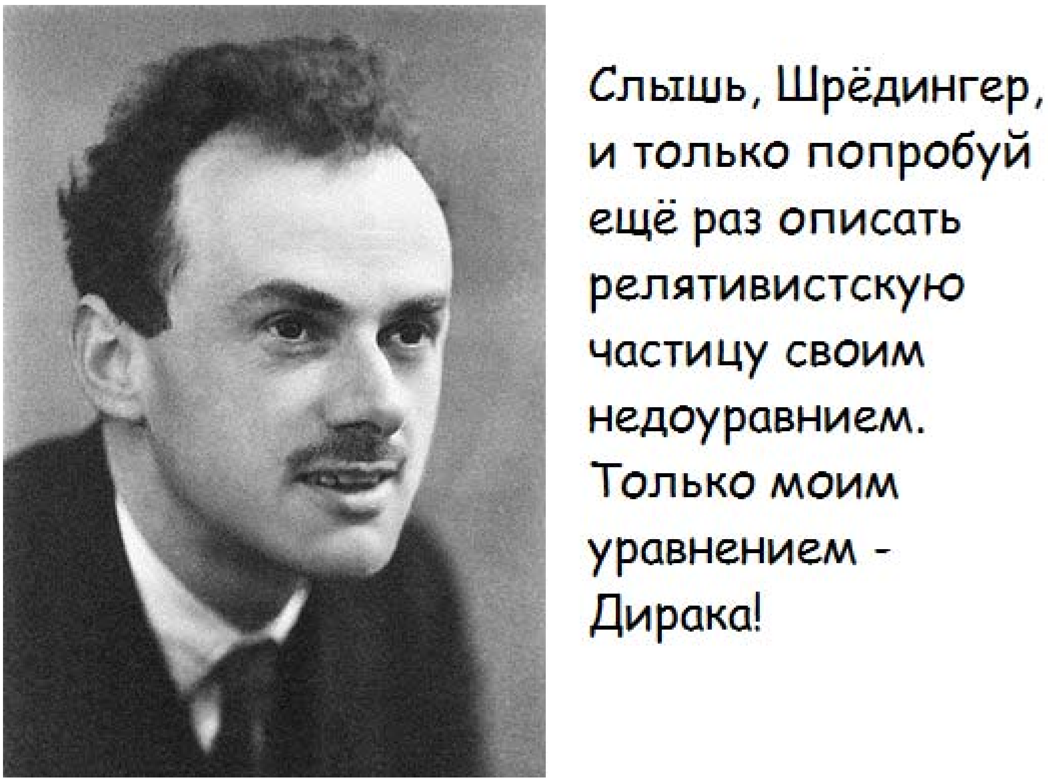
Для Шрёдингера было условие нормировки:

$$\iiint\limits_{\substack{\text{по} \\ \text{пространству}}} \Psi(x,t)\Psi^*(x,t)\, d^3V = 1$$

А для ВФ Дирака:

$$\iiint\limits_{\substack{\text{по} \\ \text{пространству}}} (\Psi_1(x,t)\Psi_1^*(x,t) + \Psi_2(x,t)\Psi_2^*(x,t) + \Psi_3(x,t)\Psi_3^*(x,t) + \Psi_4(x,t)\Psi_4^*(x,t))d^3V = 1$$



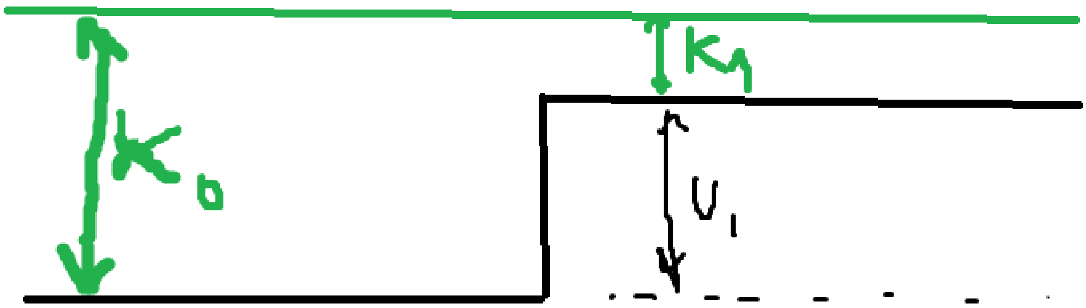


Для понимания решим баянную задачу об отражении:

Летит дираковская частица с массой m и кин.энергией K_0. Она частично отражается от потенц.стенки $U_1<K_0$. Коэф прохождения и преломления?

Что такое дираковская частица? Это разогнанная до релятивистских скоростей. Т.е. при малых скоростях мы решали эту задачу как в 4-5 семестре, а при больших

– сейчас узнаем, как теперь решать ☺

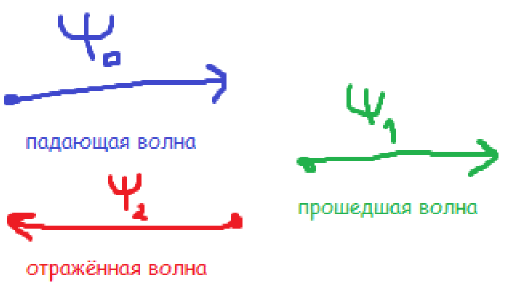


Раньше для свободной частицы было

$$\Psi(x,t) = const * e^{\frac{i(Kt-pz)}{h}}$$

(здесь и далее в теме «Теория Дирака» приняты обозначения:
W – энергия покоя
К – кин.энергия
Е – полная энергия, E=W+K. Потенц. энергия сюда не входит!)

Для дираковской частицы всё будет то же самое, но $\Psi(x,t)$ будет векторной, и будет у неё аж 4 компоненты.



Например, ВФ падающей волны будет, как было

$$\Psi_0(x,t) = const * e^{\frac{i(K_0t-pz)}{h}}$$

Но только вот потребуется домножить на вот такой вот столбец:

Умножить на вот такой вот столбец: $\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ pc/(mc^2+K_0) \\ 0 \end{matrix}$

Почему так – пойдём потом. А пока что подсчитаем третью ячейку этого столбца: $\frac{pc}{E_0} = \frac{pc}{W+K_0} = \frac{pc}{mc^2+K_0}$. Итог:

$$\boldsymbol{\Psi_0}(x,t) = A * e^{\frac{i(Et-pz)}{h}} * \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \frac{pc}{mc^2+K_0} \\ 0 \end{matrix}$$

А (далее D,F) – нормировочные константы.

Теперь давайте запишем ВФ прошедшей волны. Она будет очень похожа, только у нас изменятся кин.энергия и импульс. Подсчитаем!

Кин. энергия изменится: $K_0 \to K_1 = K_0 - U_1$

Теперь посчитаем импульс: $K_1^2 - p_1^2c^2 = (mc^2)^2$, откуда $p_1c = \sqrt{K_1^2 - (mc^2)^2}$. (У Парфёнова p_1 обозначается как р-с-волной).

Запишем ВФ прошедшей электронной волны:

$$\boldsymbol{\Psi_1}(x,t) = F * e^{\frac{i(K_1t - p_1z)}{h}} * \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_1c}{mc^2 + K_1} \\ 0 \end{matrix}$$

Осталось записать ВФ отражённой волны.

Изначально мы пишем, как для обычной (недираковской) частицы

$$\Psi_2(x,t) = const * e^{\frac{i(K_0 + pz)}{h}}$$

Обратите внимание на смену знака у pz – т.к. импульс поменял направление.

А затем по аналогии с прошедшей волной добавляем столбец:

$$\boldsymbol{\Psi_2}(x,t) = D * e^{\frac{i(K_0t + pz)}{h}} * \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-\boldsymbol{p}c}{mc^2 + K_0} \\ 0 \end{matrix}$$

(кин.энергия в отражённой волне такая же, как для падающей – $K_2 = K_0$).

Обратим внимание, что знак меняется и у импульса p в четверном столбце (выделено фиолетовым).

Ну всё, мы записали все ВФ, а теперь пишем условие сшивки:

$$\Psi_{\text{пад}} + \Psi_{\text{отр}} = \Psi_{\text{прош}} \text{ при } t = z = 0$$

Т.к. все ВФ являются векторами, то получаются у нас аж четыре уравнения:

$$\begin{cases} A + D = F \\ 0 = 0 \\ \frac{Apc}{mc^2 + K_0} + \frac{-Dpc}{mc^2 + K_0} = \frac{Fp_1c}{mc^2 + K_1} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Два уравнения тривиальны, решим остальные 2.

Запишем $\frac{Apc}{mc^2+K_0} - \frac{Dpc}{mc^2+K_0} = \frac{Fp_1c}{mc^2+K_1}$ как $A - D = F * \frac{p(mc^2+K_1)}{p_1(mc^2+K_0)}$ и обозначим $\frac{p(mc^2+K_1)}{p_1(mc^2+K_0)}$ как χ. Тогда

$$\begin{cases} A + D = F \\ A - D = F * \chi \end{cases}$$

Решение системы:

$$F = \frac{2}{1+\varkappa}A,\ D = \frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}A,\ R = \left|\frac{D}{A}\right|^2 = \left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2$$

Ура, мы нашли коэф-т отражения!

Это задача называется парадоксом Клейна. Что же тут парадоксально? Если $K_0 > U_1$, то парадокса действительно нет. А вот если $K_0 < U_1$, то $\chi < 0 \Rightarrow R > 1$ - отражённый поток больше падающего! Как так? Как минимум, это противоречит ЗСЭ – отражённый поток интенсивней падающего!

На самом деле это значит, что вакуум вблизи барьера сам рождает частицу. Т.ею число частиц не постоянно. Ну а чего вы хотели? Дираковская теория как раз описывает релятивистские частицы – разогнанные настолько, что их кин.энергия сранивма с энергией покоя. Когда частицы были нерелятивистскими, нам и 4-6 семестров хватало, где Ψ была скаляром, а тут у нас частицы релятивистские – вводим четверные столбцы, которые и порождают вот такие вот фокусы.

Уравнение Дирака

Мы поняли, как выглядит ВФ в теории Дирака. Но почему она так выглядит? Потому что она решение уравнение Дирака.

Познакомимся же с уравнением Дирака. Оно очень похоже на уравнение Шрёдингера:

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi$$

Но Шрёдингер описывает нерелятивистские частицы, где Ψ - скаляр. Когда у нас появляются четверные столбцы $\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}$, то выходит апгрейд уравнения Шрёдингера – уравнение Дирака:

$$ih\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial t} = \hat{H}_D\boldsymbol{\Psi}$$

А почему $\boldsymbol{\Psi}$ стало жирной, т.е. векторной? Да потому что теперь там аж четыре компоненты.

Дираков гамильтониан $\hat{H}_D$ (D – потому что Dирак) же выглядит вот так вот:

$$\hat{H}_D = c(\hat{\boldsymbol{\alpha}}, \hat{\boldsymbol{p}}) + mc^2\hat{\beta}$$

Где $\hat{\beta}$ - вот такая матрица Дирака:

$$\beta = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

А $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ – это вот набор матриц Дирака:

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix}$$

В общем случае

$$\widehat{\alpha_k} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\sigma_k} \\ \widehat{\sigma_k} & 0 \end{pmatrix}$$

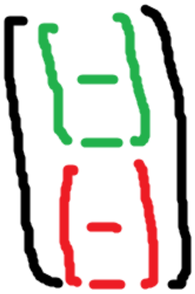
Если вам так будет понятней, можно избавиться от векторов:

$$\widehat{H}_D = c(\widehat{\alpha_1}\widehat{p_1} + \widehat{\alpha_2}\widehat{p_2} + \widehat{\alpha_3}\widehat{p_3}) + mc^2\hat{\beta}$$

Не будем объяснять, почему так и почему гамильтониан такой.

Решение уравнения Дирака

Теперь давайте обсудим, как формируется этот четверной столбец. Он на самом деле формируется из двух пар:



Верхняя пара – то, что Парфёнов обозначает $\vec{u}$. Это или $\begin{matrix}1\\0\end{matrix}$, или $\begin{matrix}0\\1\end{matrix}$.

Нижняя – то же самое $\vec{u}$, но домноженное на коэффициент $\frac{\hat{\sigma}\boldsymbol{n}}{E}$.

Замечание. В той же Википедии вы встретите запись $\frac{\hat{\sigma}\boldsymbol{n}}{E+mc^2}$. Всё зависит от того, что вы обозначаете E. Я за E обозначаю сумму кин.энергии и энергии покоя (именно она в 4-векторе E, **p**c), в Википедии же – только кин.энергию.

Минутка терминологии – столбец из двух чисел ($\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}$) называется спинором, а столбец из четырёх чисел $\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}-\\-\end{pmatrix}\end{pmatrix}$ называется биспинором (т.е. состоящим из двух спиноров).

Если вы откроете Википедию, то там $\vec{u}$ будет уже не спинором, а биспинором. А у Парфёнова $\vec{u}$ - спинор. Так что не смешивайте обозначения ☺

Ковариантная форма уравнения Дирака

Гораздо приятнее, чем обычная. Ковариантная – значит тензорная, как в теориях относительности. Получим её!

Распишем

$$ih\frac{\partial\boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = (\widehat{\alpha_1}\widehat{p_1} + \widehat{\alpha_2}\widehat{p_2} + \widehat{\alpha_3}\widehat{p_3} + mc\hat{\beta})\boldsymbol{\Psi}$$

Как операторы дифференцирования по координатам:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = (\widehat{\alpha_1}\frac{d}{dx^1} + \widehat{\alpha_2}\frac{d}{dx^2} + \widehat{\alpha_3}\frac{d}{dx^3} - \frac{mci}{h}\hat{\beta})\boldsymbol{\Psi}$$

Перекинем слагаемые между частями

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} - \widehat{\alpha_1}\frac{d}{dx^1} - \widehat{\alpha_2}\frac{d}{dx^2} - \widehat{\alpha_3}\frac{d}{dx^3} + \frac{mci}{h}\hat{\beta}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$$

Домножим всё слева на $\hat{\beta}$ и воспользуемся тем, что $\hat{\beta}^2 = 1$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct}\hat{\beta} - \hat{\beta}\widehat{\alpha_1}\frac{d}{dx^1} - \hat{\beta}\widehat{\alpha_2}\frac{d}{dx^2} - \hat{\beta}\widehat{\alpha_3}\frac{d}{dx^3} + \frac{mci}{h}\boldsymbol{\Psi} = \mathbf{0}$$

Введём гамма-матрицы:

$$\widehat{\gamma_0} = \hat{\beta}, \widehat{\gamma_k} = \widehat{\alpha_k}\hat{\beta}$$

Парфёнов записывает это как

$$\vec{\hat{\gamma}}^{\mu} = (\hat{\beta}, \hat{\beta}\vec{\hat{\alpha}})$$

Тогда получим ковариантную формулу уравнения Шрёдингера:

$$[\sum_{\mu=0}^{3} i\hbar\hat{\gamma}^{\mu}\partial_{\mu} - mc]\vec{\psi} = 0$$

Где $\partial_0 = \frac{d}{dx^0} = \frac{d}{dct}$, $\partial_1 = \frac{d}{dx^1} = \frac{d}{dx}$ и т.д. – 4-градиент.

Дираковское сопряжение

Вспомним, как мы строили сопряжённую к скалярной Ψ: просто как комплексное сопряжение: $\Psi = re^{i\varphi} => \Psi^* = re^{-i\varphi}$

А что теперь, когда у нас $\boldsymbol{\Psi}$ четырёхкомпонентна? Теперь по определению сопряжённая $\boldsymbol{\Psi}^* := \hat{\beta}\boldsymbol{\Psi} = \widehat{\gamma_0}\boldsymbol{\Psi}$ (помним, что $\widehat{\gamma_0} = \hat{\beta}$), т.е. надо не только транспонировать, но и матрично домножить на $\hat{\beta}$. Данная операция называется дираковским сопряжением.

Используя дираковское сопряжение, можно записать плотность вероятности и поток вероятности.

Вспомним, что у Шрёдингера плотность вероятности была $\Psi^*\Psi$. Давайте теперь запишем для дираковской частицы:

Плотность вероятности: $\boldsymbol{\Psi}^*\widehat{\gamma_0}\boldsymbol{\Psi}$

Поток вероятности: $\frac{j_k}{c} = \boldsymbol{\Psi}^*\widehat{\gamma_k}\boldsymbol{\Psi}$, $k \in \{1,2,3\}$

Можем запихнуть в 4-вектор: $\frac{j_k}{c} = \boldsymbol{\Psi}^*\widehat{\gamma_k}\boldsymbol{\Psi}$, $k \in \{0,1,2,3\}$, потому что $\frac{j_0}{c} = \rho$

Замечание: существуют и альтернативные формулы, используя вместо дираковского сопряжения $\boldsymbol{\Psi}^*$ транспонирование $\boldsymbol{\Psi}^+$:

Плотность вероятности: $\boldsymbol{\Psi}^+\boldsymbol{\Psi}$

Поток вероятности: $\frac{j_k}{c} = \boldsymbol{\Psi}^+\widehat{\alpha_k}\boldsymbol{\Psi}$, $k \in \{1,2,3\}$

Задача. Волновая функция имеет вид

$$C * \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3-4i \\ -1 \end{matrix}$$

Найти нормировочную константу C, если известно, что ВФ описывает одну дираковскую частицу. Зная C, найти плотность тока.

Решение. Подсчитаем $\boldsymbol{\Psi}^{+}\boldsymbol{\Psi}$: это будет $C^2(5*5+4*4+5*5+1*1)= C^2*67 \Rightarrow C = \frac{1}{\sqrt{67}}$

Теперь давайте найдём плотность тока. Нужно подсчитать вот такую вот штуку $\boldsymbol{\Psi}^{+}\widehat{\alpha_k}\boldsymbol{\Psi}$.

Вот, например, явный вид $\widehat{\alpha_1}$:

$$\begin{matrix} 0 & 00 & 1 \\ 0 & 01 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 1 & 00 & 0 \end{matrix}$$

Она меняет местами компоненты ВФ – в данном случае «переворачивая» её:

$$\widehat{\alpha_k}\boldsymbol{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{67}} \begin{matrix} -1 \\ 3-4i \\ 4 \\ 5 \end{matrix}$$

И домножаем на $\boldsymbol{\Psi}^{+}$. Получаем $\frac{1}{67}(5*(-1)+4(3-4i)+(3+4i)4+(-1)*5) = \frac{1}{67}(-5+12-16i+12+16i-5) = \frac{1}{67}*14 = \frac{14}{67}$. Отметим, что плотность тока обязательно должна получиться действительной: если получилась комплексной, то вы ошиблись в арифметике.

Итак, мы получили $\frac{j_1}{c}$, а $\frac{j_2}{c}$ и $\frac{j_3}{c}$ ищутся аналогично.

$\boldsymbol{\Psi}$ – четырёхвектор? Стрёмные тензоры

Наличие четырёх компонент -

$$\begin{matrix} \Psi_1(x,t) \\ \Psi_2(x,t) \\ \Psi_3(x,t) \\ \Psi_4(x,t) \end{matrix}$$

заставляет предположить, что $\boldsymbol{\Psi}$ – четырёхвектор. Но это не так, потому что 4-вектор должен подчиняться преобразованию Лоренца при смене координат:

$$A^n = \sum_{k=0}^{3} \text{МП}_k^n A^k$$

Где МП_m^n - матрица перехода.

Однако для $\boldsymbol{\Psi}$ это неверно! Этот четверной столбец подчиняется более сложному закону.

Так, чтобы получить из $\boldsymbol{\Psi}$ в старых координатах получить $\boldsymbol{\Psi}$ в новых координатах, нужно подействовать оператором $\hat{S}$:

$$\boldsymbol{\Psi}_{\text{нов}} = \hat{S}\boldsymbol{\Psi}_{\text{стар}}$$

В матричном виде это запишется как:

$$\Psi^n = \sum_{k=0}^{3} \hat{S}_k^n \Psi^k$$

И матрица $\hat{S}$ вовсе не матрица перехода, а определяется из уравнения

$$\hat{S}\widehat{\gamma_n}\hat{S}^+ = \sum_{k=0}^{3} \text{МП}_k^n \, \widehat{\gamma_k}$$

Где МП_k^n уже матрица перехода. Это матричное уравнение, т.е. будет 16 уравнений на 16 ячеек матрицы $\hat{S}_k^n$. Сложно? Сложно.

Поэтому теоретики, любящие работать с тензорами, избегают работы с $\boldsymbol{\Psi}$,а вместо этого вводят целую пачку тензоров:

$$\begin{cases} S = \overline{\psi}\hat{I}_4\psi \text{ — скаляр, } P = \overline{\psi}\gamma^5\psi \text{ — псевдоскаляр.} \\ V^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi \text{ — вектор.} \\ A^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi \text{ — псевдовектор.} \\ T^{\mu\nu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu\nu}\psi \text{ — антисимметричный тензор 2–го ранга.} \end{cases}$$

где

Определение. Матрица $\hat{\gamma}^5 \equiv i\hat{\gamma}^0\hat{\gamma}^1\hat{\gamma}^2\hat{\gamma}^3$ в стандартном представлении: $\hat{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & \hat{I}_2 \\ \hat{I}_2 & 0 \end{pmatrix}$

Какого-то физического смысла у них нет, с ними просто удобно работать.

Типовая задача от Парфёнова: делается преобразование СК

$$cT = ct, X = -x, Y = -y, Z = -z$$

Мы знаем тензоры v^k и a^k в старой СК. Найти их – V^k и A^k в новых.

Решение. Матрица перехода будет

1 0 0 0

0 -1 0 0

0 0 -1 0

0 0 0 -1

Компоненты вектора $v^k \to V^k$, что вполне разумно, преобразуются как

$$V^0 = v^0, V^1 = -v^1, V^2 = -v^2, V^3 = -v^3$$

А вот $a^k \to A^k$ псевдовектор, там всё домножается на определитель матрицы перехода, который в данном случае равен -1, поэтому

$$A^0 = -a^0, A^1 = a^1, A^2 = a^2, A^3 = a^3$$

А что в электромагнитном поле?

Доселе у нас его не было. Посмотрим, что будет засунуть частицу в электромагнитное поле.

Тогда обычное уравнение Дирака

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = ((\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{p}}) + mc\hat{\beta})\boldsymbol{\Psi}$$

Преобразуется:

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = (\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}\right) + mc\hat{\beta} + q\varphi)\boldsymbol{\Psi}$$

Как мы видим, в гамильтониан добавились векторный потенциал **A** и скалярный потенциал φ.

Парфёнов для удобства обозначает $\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}$ как новую величину **-** $\widehat{\boldsymbol{P}}$. Тогда

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = ((\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{P}}) + mc\hat{\beta} + q\varphi)\boldsymbol{\Psi}$$

Это уравнение верно всегда – для произвольных скоростей электрона!!! До того, как до этого додумался Дирак, другие физики пытались пихать электроны в электромагнитное поле и писать гамильтонианы. Например, Вольфгаунг Паули взял уравнение Шрёдингера

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial ct} = \widehat{H}_{\text{Шрёд}}\Psi$$

И попытался по аналогии с классикой записать

$$ih\frac{\partial \Psi}{\partial ct} = \left(\frac{\widehat{\boldsymbol{p} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}}^{2}}{2m} + q\varphi\right)\Psi$$

Однако всякие Штерны-Герлахи показали, что надо ввести какой-то спин:

$$i\hbar\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \left\{\frac{(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2}{2m} + e\varphi - 2\mu_0\hat{\vec{S}}\vec{B}\right\}\vec{u}$$

И вводить какой-то спиновой столбец **u** – $\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}$. Помните? Мы активно бодались с ним в 6-м семе. Он нас всех бесил невероятно.

Так вот, оказывается, что если взять уравнение Паули в э/м поле, которое, как я напомню, верно ВСЕГДА

$$ih\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}}{\partial ct} = (\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{q\boldsymbol{A}}{c}\right) + mc\hat{\beta} + q\varphi)\boldsymbol{\Psi}$$

И выполнить приближение (Парфёнов на это тратит час, мы не будем тонуть в скучных выкладках), откинув слагаемые, выше v/c, то и получим уравнение

Паули. Четверной столбец $\boldsymbol{\Psi}$ разобьётся на 2 спинора – **u** и **v**:

$$\vec{\Psi} = \begin{bmatrix} \{-\} \\ \{-\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{bmatrix}$$

Из которых **u** и будет тем самым спинором из 6-го семестра $\begin{matrix} s_1 \\ s_2 \end{matrix}$, а нижний спинор однозначно выражался через **u** - $\vec{v}(t,\vec{r}) \simeq \frac{(\vec{\sigma}\hat{\vec{p}})}{2mc}\vec{u}(t,\vec{r})$, что и позволяло нам забивать на **u** в 6-м семестре.

Вопрос на понимание: а если выполнить ещё более сильное приближение, выкинув слагаемые порядка v/c и выше, что мы получим? Ответ – совсем уж нерелятивистское уравнение Шрёдингера.

Уравнение Паули – следующая ступень развития эволюции, где есть слагаемые порядка v/c, но не более.

Далее идёт ещё одно уравнение, между Паули и Дираком – т.н. уравнение Фолди-Вайтхаузена (не будем его выписывать, оно страшное) – следующая ступень элитности, где есть слагаемые порядка v^2/c^2, но не более.

И уравнение Дирака – высшая степень эволюции, абсолютно точное уравнение.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \hat{H}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + U(\vec{r})\psi$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}\psi = \left[\frac{1}{2m}(\hat{p} - \frac{e}{c}A\hat{I})^2 + e\varphi\hat{I} - \frac{e\hbar}{2mc}(\hat{\sigma}\vec{B})\right]\psi$$

$$(i\hbar c\hat{\gamma}^\mu\,\partial_\mu - mc^2)\,\vec{\psi} = 0$$